ELSEVIER
Bull. Sci. math. 134 (2010) 588–604
BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
www.elsevier.com/locate/bulsci

Idéaux fermés d'algèbres de Beurling analytiques sur le bidisque

B. Bouya [a,1], O. El-Fallah [b], K. Kellay [c,*,2]

[a] Laboratoire Paul Painleve, Universite Lille I, Bat M2, 59655 Villeneuve D'Ascq cedex, France
[b] Departement de Mathematiques, Universite Mohamed V, B.P. 1014, Rabat, Maroc
[c] LATP, CMI, Universite de Provence, 39 Rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

Reçu le 13 janvier 2010

Disponible sur Internet le 28 janvier 2010

Résumé

Nous étudions les idéaux fermés de l'algèbre de Beurling sur le bidisque à poids polynômial $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. Nous caractérisons les fonctions $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$, sous certaines conditions sur l'ensemble des zéros de f, telle que l'idéal engendré par f coïncide avec l'idéal d'annulation de l'ensemble des zéros de f.

Abstract

We study the closed ideal in the Beurling algebras $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ of holomorphic function f in the bidisc such that

$$\sum_{n,m\geqslant 0} \left|\widehat{f}(n,m)\right|(1+n)^\alpha(1+m)^\beta < \infty.$$

We characterize the functions $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$, under a restriction on their zero sets, such that the closed ideal generated by f coincides with the ideal of all functions vanishing on the zero set of f.

MSC: primary 46J15; secondary 32H25, 46J20

Keywords: Beurling algebras; Closed ideals; Bézout's identity

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : brahimbouya@gmail.com (B. Bouya), elfallah@fsr.ac.ma (O. El-Fallah), kellay@cmi.univ-mrs.fr (K. Kellay).
1 Adresse actuelle: Departement de Mathematiques, Universite Mohamed V, B.P. 1014, Rabat, Maroc.
2 The research of the third author was supported in part by ANR–Dynop.

0007-4497/$ – see front matter
doi:10.1016/j.bulsci.2010.01.005

1. Introduction

Soient $\mathbb{D}$ le disque unité du plan complexe et $\mathcal{A}(\mathbb{D}^n)$ l'algèbre du polydisque, l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}^n$ et holomorphes sur $\mathbb{D}^n$ munie de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}^n} \big|f(z)\big|.$$

Lorsque $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach incluse dans $\mathcal{A}(\mathbb{D}^n)$, $f \in \mathcal{B}$ et E est un ensemble fermé de $\overline{\mathbb{D}}^n$; on notera par :

- $I_{\mathcal{B}}(f) = \overline{f\mathcal{B}}$, l'idéal fermé de $\mathcal{B}$ engendré par f.
- $Z_f = \{z \in \overline{\mathbb{D}}^n\colon\ f(z) = 0\}$, l'ensemble des zéros de f.
- $I_{\mathcal{B}}(E) = \{g \in \mathcal{B}\colon\ g_{|E} = 0\}$, l'idéal d'annulation de $\mathcal{B}$ sur E.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la détermination des fonctions $f \in \mathcal{B}$ qui satisfont $I_{\mathcal{B}}(f) = I_{\mathcal{B}}(Z_f)$ dans le cas où $\mathcal{B}$ est une algèbre de Beurling analytique à poids polynômial. Dans le cas de l'algèbre du disque, $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathbb{D})$, le théorème de Beurling–Rudin [11] donne une caractérisation complète des idéaux fermés de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que $Z_f \subset \mathbb{T}$ alors $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(Z_f)$ si et seulement si, f est extérieure :

$$f(z) = \exp \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log\big|f\big(e^{i\theta}\big)\big| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Dans une série d'articles [6–10] motivés par le problème de Levin [14], H. Hedenmalm s'est intéressé aux idéaux fermés de certaines algèbres de fonctions en plusieurs variables, notamment $\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ et $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2_+)$. Il a obtenu, dans le cas de l'algèbre du bidisque, les résultats suivants :

Théorème. *(Voir [6,8].)*

(i) *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ telle que $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, alors $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(Z_f)$ si et seulement si les fonctions $f(\cdot, w)$ sont extérieures pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$ et la fonction $f(1,\cdot)$ est, soit identiquement nulle, soit extérieure.*

(ii) *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ telle que $Z_f = (\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$, si*

$$\big|\log\big|f(z,w)\big|\big| = o\big(1/\min\big(|1-z|, |1-w|\big)\big), \quad z \to 1 \text{ ou } w \to 1, \tag{1}$$

alors $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}((\{1\} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \{1\}))$.

Signalons aussi que Hedenmalm a montré que la condition (1) est presque optimale (voir Lemma 1.5 et Theorem 1.6 dans [8]).

Pour $\alpha \geqslant 0$, considérons maintenant les algèbres de Beurling analytiques suivantes :

$$\mathcal{A}^+_\alpha := \Big\{ f = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\colon\ \|f\|_\alpha = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|(1+n)^\alpha < \infty \Big\}.$$

Dans [12], J.P. Kahane a montré que si $f \in \mathcal{A}^+_\alpha$ telle que $Z_f = \{1\}$ alors $I_{\mathcal{A}^+_\alpha}(f) = I_{\mathcal{A}^+_\alpha}(\{1\})$ si et seulement si f est extérieure. Notons que dans ce cas cette condition est équivalente à

$$\big|\log\big|f(z)\big|\big| = o\big(1/\big(1-|z|\big)\big), \quad |z| \to 1.$$

Mentionnons également que la caractérisation des idéaux de $\mathcal{A}_\alpha^+$ parait compliquée, voir à ce sujet [5].

Pour $\alpha, \beta \geqslant 0$, on considère les algèbres de Beurling du bidisque suivantes :

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+ := \Big\{ f(z,w) = \sum_{n,m\geqslant 0} a_{n,m} z^n w^m \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2): \\ \|f\|_{\alpha,\beta} := \sum_{n,m\in\mathbb{N}} |a_{n,m}|(1+n)^\alpha (1+m)^\beta < \infty \Big\},$$

dans ce travail nous étendons les résultats obtenus par H. Hedenmalm [6–8] aux algèbres $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$. Nous montrons les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. *Soit* $(\alpha,\beta) \in ([0,1[\times]0,1[) \cup (]0,1[\times [0,1[)$ *et soit* $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ *telle que* $Z_f = \{1\}\times\overline{\mathbb{D}}$. *Alors* $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(\{1\}\times\overline{\mathbb{D}})$ *si et seulement si les fonctions* $f(\cdot,w)$ *sont extérieures pour tout* $w \in \overline{\mathbb{D}}$.

Notons que le cas $\alpha = \beta = 0$ reste un problème ouvert, voir Remarque 11. Comme conséquence du Théorème 1 nous obtenons

Corollaire. *Soit* $(\alpha,\beta) \in ([0,1[\times]0,1[) \cup (]0,1[\times [0,1[)$ *et soit* $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ *telle que* $Z_f = \{(1,1)\}$. *Alors* $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(\{(1,1)\})$ *si et seulement si les fonctions* $f(\cdot,1)$ *et* $f(1,\cdot)$ *sont extérieures.*

Théorème 2. *Soit* $(\alpha,\beta) \in]0,1[\times]0,1[$ *et soit* $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ *telle que* $Z_f = (\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}}\times\{1\})$. *Si*

$$\big|\log|f(z,w)|\big| = o\big(1/\min(|1-z|,|1-w|)\big), \quad z\to 1 \text{ ou } w\to 1,$$

alors $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}((\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}}\times\{1\}))$.

Notons que pour $\alpha \geqslant 1$ ou $\beta \geqslant 1$, des résultats analogues, faisant intervenir les dérivées partielles de f, peuvent être obtenus de la même manière.

Le paragraphe 2 sera consacré à l'étude de la notion de la δ-visibilité (version quantitative d'inversibilité et de l'identité de Bézout) qui jouera un rôle fondamental dans la preuve du Théorème 1 et du Théorème 2.

2. La δ-visibilite

Dans cette partie nous rappelons la notion de la δ-visibilité introduite et étudiée dans [1–4,15]. Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach commutative unitaire. L'ensemble des caractères de $\mathcal{B}$ sera noté $\mathcal{M}_\mathcal{B}$. La transformation de Gelfand associée à $\mathcal{B}$ est l'application :

$$\mathcal{G}_\mathcal{B} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{M}_\mathcal{B}), \\ x \longrightarrow \widehat{x} : \phi \in \mathcal{M}_\mathcal{B} \longrightarrow \widehat{x}(\phi) = \phi(x),$$

où $\mathcal{C}(\mathcal{M}_\mathcal{B})$ est l'algèbre des fonctions continues sur $\mathcal{M}_\mathcal{B}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathcal{B}^n$, on pose

$$\begin{cases} \|f\| := \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 \right)^{1/2}, \\ \delta_f := \displaystyle\inf_{\phi \in \mathcal{M}_\mathcal{B}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \widehat{f}_k(\phi) \right|^2 \right)^{1/2}. \end{cases}$$

Définition 3. Soit $0 < \delta \leqslant 1$. On dit que le spectre de $\mathcal{B}$ est δ–n-visible s'il existe une constante $\mathcal{C}_n(\delta)$, qui dépend de δ et de n, telle que pour tout $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathcal{B}^n$, $\|f\| \leqslant 1$ vérifiant $\delta_f \geqslant \delta$, il existe $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathcal{B}^n$ tels que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k g_k = 1, \\ \|g\| \leqslant \mathcal{C}_n(\delta). \end{cases}$$

Posons

$$\mathcal{C}_n(\delta, \mathcal{B}) := \sup_{f \in \mathcal{B}^n} \left\{ \inf \left\{ \|g\|\colon\ g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{B}^n \text{ et } \sum_{k=1}^{n} g_k f_k = 1 \right\} \right\},$$

le sup étant pris sur les $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{B}^n$ telles que $\delta_f \geqslant \delta$ et $\|f\| \leqslant 1$. En particulier

$$\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{B}) := \sup\left\{ \left\| f^{-1} \right\|\colon\ \|f\| \leqslant 1 \text{ et } \left| \widehat{f}(\phi) \right| \geqslant \delta \ (\phi \in \mathcal{M}_\mathcal{B}) \right\}.$$

2.1. *La δ–1-visibilité pour les algèbres de Beurling*

Soit $\alpha \geqslant 0$ et soit l'algèbre de Beurling à poids

$$\mathcal{A}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})\colon\ \|f\|_\alpha := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(n) \right| \left(1 + |n|\right)^\alpha < \infty \right\}.$$

Munie du produit ponctuel et de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha$ est une algèbre de Banach commutative unitaire. En identifiant son spectre à $\mathbb{T}$, la transformation de Gelfand devient : $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_\alpha}(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{A}_\alpha$. Lorsque $\alpha \neq 0$, il a été démontré dans [2,3] que le spectre de $\mathcal{A}_\alpha$ est δ–1-visible pour tout $0 < \delta \leqslant 1$. Plus précisément pour tout $\alpha \in \,]0, 1[$ on a

$$\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}_\alpha) \leqslant c/\delta^{2+1/\alpha}. \tag{2}$$

Ce résultat peut être étendu aux algèbres de Beurling en plusieurs variables. Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ l'algèbre de Beurling définie par :

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{T}^2\right)\colon\ \|f\|_{\alpha,\beta} := \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \left| \widehat{f}(n,m) \right| \left(1 + |n|\right)^\alpha \left(1 + |m|\right)^\beta < \infty \right\}.$$

Munie du produit ponctuel et de la norme $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire dont le spectre peut être identifié à $\mathbb{T}^2$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4. *Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Posons $\gamma = \inf\{1, \alpha, \beta\}$. On a*

$$\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \leqslant c_{\alpha,\beta}\delta^{-(3+\frac{1}{\gamma}(1+\alpha+\beta))}, \quad 0 < \delta < 1,$$

où $c_{\alpha,\beta}$ est une constante qui dépend seulement de α et de β.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ telle que $|f| \geqslant \delta > 0$ et telle que $\|f\|_{\alpha,\beta} \leqslant 1$. Pour tout $0 < \rho < 1$, on pose

$$f_\rho(z,w) := \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n,m)\rho^{|n|+|m|}z^n w^m, \quad \rho \leqslant |z| \leqslant 1/\rho \text{ et } \rho \leqslant |w| \leqslant 1/\rho.$$

Posons $a_{n,m} = \widehat{f}(n,m)$ et $\gamma = \inf\{\alpha, \beta, 1\}$. Pour $z, w \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}\bigl|f(z,w) - f_\rho(z,w)\bigr| &= \Bigl|\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}\bigl(1-\rho^{|n|+|m|}\bigr)z^n w^m\Bigr| \\ &\leqslant \sup_{n,m\in\mathbb{Z}} \frac{1-\rho^{|n|+|m|}}{(1+|n|)^\alpha(1+|m|)^\beta} \leqslant 2(1-\rho)^\gamma.\end{aligned}$$

Soit ρ tel que $2(1-\rho)^\gamma = \delta/3$. Le rayon spectral de $(f - f_\rho)f_\rho^{-1}$ est strictement inférieur à 1 et

$$f^{-1} = \sum_{p\in\mathbb{N}} (f - f_\rho)^p f_\rho^{-p-1}. \tag{3}$$

Soit $p \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\bigl\|(f-f_\rho)^p\bigr\|_{\alpha,\beta} &= \biggl\|\biggl(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}\bigl(1-\rho^{|n|+|m|}\bigr)z^n w^m\biggr)^p\biggr\|_{\alpha,\beta} \\ &\leqslant \sup_{n_i,m_j\in\mathbb{Z}} \frac{(1-\rho^{|n_1|+|m_1|})\ldots(1-\rho^{|n_p|+|m_p|})}{(1+|n_1|)^\alpha(1+|m_1|)^\beta\ldots(1+|n_p|)^\alpha(1+|m_p|)^\beta} \\ &\quad\times \bigl(1+|n_1+\cdots+n_p|\bigr)^\alpha\bigl(1+|m_1+\cdots+m_p|\bigr)^\beta.\end{aligned}$$

Puisque $(1+|n_1+\cdots+n_p|) \leqslant p\max_{1\leqslant k\leqslant p}(1+|n_k|)$,

$$\begin{aligned}&\bigl\|(f-f_\rho)^p\bigr\|_{\alpha,\beta} \\ &\quad\leqslant p^{\alpha+\beta}\sup_{n_i,m_j\in\mathbb{Z}}\sup_{k=1}^{p}\sup_{l=1}^{p}\prod_{q=1}^{p}\frac{(1-\rho^{|n_q|+|m_q|})}{(1+|n_q|)^\alpha(1+|m_q|)^\beta}\bigl(1+|n_k|\bigr)^\alpha\bigl(1+|m_l|\bigr)^\beta \\ &\quad\leqslant p^{(\alpha+\beta)}\bigl(2(1-\rho)^\gamma\bigr)^{p-2}.\end{aligned} \tag{4}$$

Posons $\widehat{f_\rho^{-p-1}}(n,m) = b_{n,m}$, $p \geqslant 0$. L'inégalité de Hölder et l'égalité de Plancherel–Parseval, nous donne

$$\begin{aligned}&\bigl\|f_\rho^{-p-1}\bigr\|_{\alpha,\beta} \\ &\quad\leqslant \biggl(\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \rho^{2(|n|+|m|)}\bigl(1+|n|\bigr)^{2\alpha}\bigl(1+|m|\bigr)^{2\beta}\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\biggl(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|b_{n,m}|^2\rho^{-2|n|-2|m|}\biggr)\biggr)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c}{(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}}\Bigg(\int\limits_{\rho\mathbb{T}\cup\rho^{-1}\mathbb{T}}\ \int\limits_{\rho\mathbb{T}\cup\rho^{-1}\mathbb{T}} \big|f_\rho^{-p-1}(\xi,\zeta)\big|^2\,d\xi\,d\zeta\Bigg)^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{p+1}(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}}. \tag{5}$$

De (3), (4) et (5), on en déduit que

$$\begin{aligned}\|f^{-1}\|_{\alpha,\beta} &\leqslant \sum_{p\geqslant 0}\big\|(f-f_\rho)^p\big\|_{\alpha,\beta}\big\|f_\rho^{-p-1}\big\|_{\alpha,\beta}\\ &\leqslant \|f_\rho^{-1}\|_{\alpha,\beta}+\|f_\rho^{-2}\|_{\alpha,\beta}+\frac{c}{2(1-\rho)^{2\gamma+\alpha+\beta+1}}\sum_{p\geqslant 2}\frac{p^{(\alpha+\beta)}(2(1-\rho)^\gamma)^p}{\delta^{p+1}}\\ &\leqslant \frac{c}{\delta^3(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}}=\frac{c}{\delta^{3+\frac{1}{\gamma}(\alpha+\beta+1)}}. \qquad \square\end{aligned}$$

2.2. *La δ–2-visibilité de l'algèbre $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$*

La δ–2-visibilité pour une algèbre de Banach commutative et unitaire revient à la résolution de l'identité de Bésout avec contrôle des normes des solutions. Le cas d'une variable à été traité dans [4]. Nous étendons ce résultat au cas de plusieurs variables.

Théorème 5. *Soient $\alpha,\beta>0$ et soient $f_1, f_2\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ et $\delta>0$ telles que*

$$\delta^2\leqslant\big|f_1(z)\big|^2+\big|f_2(z)\big|^2\leqslant 1,\quad z\in\mathbb{D}^2.$$

Il existe $h_1, h_2, \in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ telles que

$$\begin{cases} f_1h_1+f_2h_2=1,\\ \|h_1\|^2_{\alpha,\beta}+\|h_2\|^2_{\alpha,\beta}\leqslant\delta^{-c_{\alpha,\beta}},\end{cases}$$

où $c_{\alpha,\beta}$ est une constante qui ne dépend que de α et de β.

Ce théorème signifie que

$$\mathcal{C}_2\big(\delta,\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}\big)\leqslant\delta^{-c_{\alpha,\beta}},\quad 0<\delta\leqslant 1.$$

Compte tenu du Théorème 4, la preuve du Théorème 5 est une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme 6. *Soient $\alpha,\beta>0$. On a*

$$\mathcal{C}_2\big(\delta,\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}\big)\leqslant c\,\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big),\quad 0<\delta\leqslant 1,$$

où c est une constante universelle.

Pour chaque fonction $g\in\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ et pour $0\leqslant r,s\leqslant 1$ on définit la fonction $(g)_{r,s}\in\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ par

$$(g)_{r,s}(z,w)=g(rz,sw),\quad z,w\in\mathbb{D}.$$

Soit $\partial_z=\partial/\partial z$ la dérivée partielle par rapport à la variable z et on désigne par $\mathrm{Hol}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert $\mathcal{U}$. Nous avons besoin du sous-lemme suivant :

Sous-Lemme 7. *Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}^2$ et soient $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ tels que*

$$b(z,w) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi,w)}{\xi - z}\,d\mathrm{A}(\xi), \quad z, w \in \mathbb{D},$$

où dA est la mesure d'aire. On a

$$\widehat{b}(n,m) = \begin{cases} 0, & (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}, \\ 2\int_0^1 \widehat{(a)_{r,1}}(n+1,m)r^{-n}\,dr, & (n,m) \notin \mathbb{N}\times\mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus, si $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{U})$, alors

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \bigl|\widehat{fb}(n,m)\bigr|(1+n)^\alpha(1+m)^\beta \leqslant 2\|f\|_{\alpha,\beta}\int_0^1 \bigl\|(a)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr.$$

Démonstration. Par le théorème de convergence dominée on a

$$b\bigl(e^{i\theta}, e^{i\varphi}\bigr) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi, e^{i\varphi})}{\xi - e^{i\theta}}\,d\mathrm{A}(\xi).$$

D'après le théorème de Fubini on obtient

$$\widehat{b}(n,m) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{D}}\left(\int_0^{2\pi} a\bigl(\xi, e^{i\varphi}\bigr)e^{-im\varphi}\,d\varphi\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\theta}}{\xi - e^{i\theta}}\,d\theta\right)d\mathrm{A}(\xi).$$

Si $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, alors $\widehat{b}(n,m) = 0$. Sinon

$$\begin{aligned}
\widehat{b}(n,m) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{D}}\left(\int_0^{2\pi} a\bigl(\xi, e^{i\varphi}\bigr)e^{-im\varphi}\,d\varphi\right)\xi^{-n-1}\,d\mathrm{A}(\xi) \\
&= 2\int_0^1\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a\bigl(re^{i\theta}, e^{i\varphi}\bigr)e^{-i(n+1)\theta}e^{-im\varphi}\,d\theta\,d\varphi\right)r^{-n}\,dr \\
&= 2\int_0^1 \widehat{(a)_{r,1}}(n+1,m)r^{-n}\,dr.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\widehat{fb}(n,m) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{m}\widehat{b}(-l,k)\widehat{f}(n+l, m-k),$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,m=0}^{\infty}\bigl|\widehat{fb}(n,m)\bigr|(1+n)^\alpha(1+m)^\beta \\
&\quad = \sum_{n,m=0}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k\leqslant m}\widehat{b}(-l,k)\widehat{f}(n+l,m-k)(1+n)^\alpha(1+m)^\beta\right|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k\leqslant m}\left|\widehat{b}(-l,k)\right|\left(1+|k|\right)^{\beta}\left|\widehat{f}(n+l,m-k)\right|(1+n+l)^{\alpha}(1+m-k)^{\beta}$$

$$\leqslant \|f\|_{\alpha,\beta}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{b}(-l,k)\right|\left(1+|k|\right)^{\beta}$$

$$\leqslant \|f\|_{\alpha,\beta}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\left|\widehat{(a)_{r,1}}(1-l,k)\right|\left(1+|k|\right)^{\beta}r^l\,dr$$

$$\leqslant 2\|f\|_{\alpha,\beta}\int_0^1\left\|(a)_{r,1}\right\|_{\alpha,\beta}dr. \qquad \square$$

Preuve du Lemme 6. Soit $\delta\in\,]0,1]$ et soient $f_1, f_2\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ satisfaisant

$$\begin{cases}\|f_1\|^2_{\alpha,\beta}+\|f_2\|^2_{\alpha,\beta}\leqslant 1,\\ \mathrm{F}(z,w)=\left|f_1(z,w)\right|^2+\left|f_2(z,w)\right|^2\geqslant\delta^2.\end{cases}$$

Supposons d'abord que f_1 et f_2 sont holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}^2$. On pose

$$\phi_i=\frac{\overline{f}_i}{\mathrm{F}},\quad i=1,2.$$

Comme dans la résolution du problème de la couronne [13], nous allons corriger la solution (ϕ_1,ϕ_2) de l'équation $f_1\phi_1+f_2\phi_2=1$, pour obtenir une solution holomorphe au voisinage du bidisque. D'abord, on commence par corriger les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à la première variable z, soit

$$\begin{cases}g_1=\phi_1+f_2b,\\ g_2=\phi_2-f_1b,\\ \bar\partial_z b=\phi_1\bar\partial_z\phi_2-\phi_2\bar\partial_z\phi_1=a.\end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $f_1g_1+f_2g_2=1$ et que les fonctions g_i $(i=1,2)$ sont holomorphes par rapport à la première variable sur le disque. Ensuite, nous corrigeons à nouveau les fonctions obtenues g_1 et g_2 comme suit

$$\begin{cases}h_1=g_1+f_2d,\\ h_2=g_2-f_1d,\\ \bar\partial_w d=g_1\bar\partial_w g_2-g_2\bar\partial_w g_1=c.\end{cases}$$

On obtient ainsi des fonctions holomorphes sur le bidisque h_1, h_2 satisfaisant l'identité de Bézout suivante $f_1h_1+f_2h_2=1$.

Les solutions b et d sont données par :

$$b(z,w)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{a(\xi,w)}{\xi-z}\,d\mathrm{A}(\xi)\quad\text{et}\quad d(z,w)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{c(z,\zeta)}{\zeta-w}\,d\mathrm{A}(\zeta).$$

Dans ce qui suit nous allons majorer les normes de h_1 et de h_2. On a

$$
\begin{aligned}
\|h_1\|_{\alpha,\beta} &= \|\phi_1 + f_2 b + f_2 d\|_{\alpha,\beta} \\
&\leqslant \|\phi_1\|_{\alpha,\beta} + \sum_{n,m=0}^{\infty} \bigl|\widehat{f_2 b}(n,m)\bigr|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \\
&\quad + \sum_{n,m=0}^{\infty} \bigl|\widehat{f_2 d}(n,m)\bigr|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

et

$$
\|\phi_1\|_{\alpha,\beta} \leqslant \bigl\|\mathrm{F}^{-1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\|f_1\|_{\alpha,\beta} \leqslant \mathcal{C}_1\bigl(\delta^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}\bigr)\|f_1\|_{\alpha,\beta}.
\tag{7}
$$

D'aprés le Sous-Lemme 7, on obtient

$$
\sum_{n,m=0}^{\infty} \bigl|\widehat{f_2 b}(n,m)\bigr|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leqslant 2\|f_2\|_{\alpha,\beta}\int_0^1 \bigl\|(a)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr.
\tag{8}
$$

Puisque

$$
\begin{aligned}
\bigl\|(a)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta} &= \bigl\|\bigl(\overline{(\partial_z f_1)_{r,1}(f_2)_{r,1}} - \overline{(f_1)_{r,1}(\partial_z f_2)_{r,1}}\bigr)\bigl(\mathrm{F}^{-2}\bigr)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta} \\
&\leqslant \bigl\|\bigl(\mathrm{F}^{-1}\bigr)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}^2\bigl(\bigl\|(\partial_z f_1)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\bigl\|(f_2)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta} + \bigl\|(f_1)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\bigl\|(\partial_z f_2)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\bigr) \\
&\leqslant \mathcal{C}_1^2\bigl(\delta^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}\bigr)\bigl(\bigl\|(\partial_z f_1)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta}\bigl\|(\partial_z f_2)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\bigr),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \bigl\|(a)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr &\leqslant \mathcal{C}_1^2\bigl(\delta^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}\bigr) \\
&\quad \times \left(\|f_2\|_{\alpha,\beta}\int_0^1 \bigl\|(\partial_z f_1)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr + \|f_1\|_{\alpha,\beta}\int_0^1 \bigl\|(\partial_z f_2)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr\right).
\end{aligned}
$$

Pour $i = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \bigl\|(\partial_z f_i)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr &= \int_0^1 \sum_{n,m=0}^{\infty} n\bigl|\widehat{f_i}(n,m)\bigr|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} r^{n-1}\,dr \\
&\leqslant \|f_i\|_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\int_0^1 \bigl\|(a)_{r,1}\bigr\|_{\alpha,\beta}\,dr \leqslant 2\mathcal{C}_1^2\bigl(\delta^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}\bigr)\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}.
\tag{9}
$$

En combinant les inégalités (8) et (9), on obtient

$$
\sum_{n,m=0}^{\infty} \bigl|\widehat{f_2 b}(n,m)\bigr|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leqslant 4\mathcal{C}_1^2\bigl(\delta^2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}\bigr)\|f_1\|_{\alpha,\beta}.
\tag{10}
$$

Dans ce qui suit nous allons majorer la quantité suivante

$$
\sum_{n,m=0}^{\infty} \bigl|\widehat{f_2 d}(n,m)\bigr|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta}.
$$

En utilisant de nouveau le Sous-Lemme 7, il résulte que

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left|\widehat{f_2 d}(n,m)\right|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta} \leqslant 2\|f_2\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \left\|(c)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta} ds, \tag{11}$$

où

$$c = g_1 \overline{\partial_w} g_2 - g_2 \overline{\partial_w} g_1 = \phi_1 \overline{\partial_w} \phi_2 - \phi_2 \overline{\partial_w} \phi_1 - \overline{\partial_w} b.$$

De la même façon que dans l'équation (9),

$$\int_0^1 \left\|(\phi_1 \overline{\partial_w} \phi_2 - \phi_2 \overline{\partial_w} \phi_1)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta} ds \leqslant 2\mathcal{C}_1^2\big(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}. \tag{12}$$

Puisque

$$\overline{\partial_w} b(z, sw) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial_w} a(\xi, sw)}{\xi - z}\, dA(\xi), \quad z, w \in \mathbb{D},$$

d'après le Sous-Lemme 7, on obtient

$$\widehat{(\overline{\partial_w} b)_{1,s}}(n,m) = 0, \quad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},$$

$$\widehat{(\overline{\partial_w} b)_{1,s}}(n,m) \leqslant 2 \int_0^1 \left|\widehat{\big(\overline{\partial_w}(a)\big)_{r,s}}\right|(n+1,m) r^{-n}\, dr, \quad (n,m) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$$

Ce qui entraîne que

$$\int_0^1 \left\|(\overline{\partial_w} b)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta} ds \leqslant 2 \int_0^1 \int_0^1 \left\|(\overline{\partial_w} a)_{r,s}\right\|_{\alpha,\beta} dr\, ds.$$

Comme $a = (\overline{\partial_z(f_1) f_2} - \overline{f_1 \partial_z f_2})\mathrm{F}^{-2}$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\partial_w} a = {} & \big(\overline{\partial_z \partial_w(f_1) f_2 + \partial_z f_1 \partial_w f_2 - \partial_w f_1 \partial_z f_2 - f_1 \partial_z \partial_w f_2}\big)\mathrm{F}^{-2} \\ & - 2\big(\overline{\partial_z(f_1) f_2} - \overline{f_1 \partial_z(f_2)}\big)(f_1 \overline{\partial_w f_1} + f_2 \overline{\partial_w f_2})\mathrm{F}^{-3}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \left\|\big(\overline{\partial_z \partial_w(f_1) f_2 + \partial_z f_1 \partial_w f_2 - \partial_w f_1 \partial_z f_2 - f_1 \partial_z \partial_w f_2}\big)_{r,s}\big(\mathrm{F}^{-2}\big)_{r,s}\right\|_{\alpha,\beta} \\ & \quad \leqslant \mathcal{C}_1^2\big(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\Big(\left\|\partial_z \partial_w(f_1)_{r,s}\right\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} + \left\|\partial_z(f_1)_{r,1}\right\|_{\alpha,\beta}\left\|\partial_w(f_2)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta} \\ & \qquad + \left\|\partial_w(f_1)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta}\left\|\partial_z(f_2)_{r,1}\right\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta}\left\|\partial_z \partial_w(f_2)_{r,s}\right\|_{\alpha,\beta}\Big).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \left\|\big(\overline{\partial_z(f_1) f_2} - \overline{f_1 \partial_z(f_2)}\big)_{r,s}(f_1 \overline{\partial_w f_1} + f_2 \overline{\partial_w f_2})_{r,s}\big(\mathrm{F}^{-3}\big)_{r,s}\right\|_{\alpha,\beta} \\ & \quad \leqslant \mathcal{C}_1^3\big(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\Big(\left\|\big(\partial_z(f_1)\big)_{r,1}\right\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta}\left\|\partial_z\big((f_2)\big)_{r,1}\right\|_{\alpha,\beta}\Big) \\ & \qquad \times \Big(\|f_1\|_{\alpha,\beta}\left\|(\partial_w f_1)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta} + \|f_2\|_{\alpha,\beta}\left\|(\partial_w f_2)_{1,s}\right\|_{\alpha,\beta}\Big).\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 \big\|(\overline{\partial_w}a)_{r,s}\big\|_{\alpha,\beta}\,dr\,ds\\
&\quad\leqslant 4\mathcal{C}_1^2\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}+2\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}\\
&\quad\leqslant 6\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \big\|(\overline{\partial_w}b)_{1,s}\big\|_{\alpha,\beta}\,ds\leqslant 12\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}\|f_2\|_{\alpha,\beta}. \tag{13}$$

En combinant (11), (12) et (13), on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\big|\widehat{f_2d}(n,m)\big|(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta}\leqslant 28\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}. \tag{14}$$

Les inégalités (6), (7), (10) et (14) entraînent que

$$\|h_1\|_{\alpha,\beta}\leqslant 33\ \mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_1\|_{\alpha,\beta}.$$

De la même façon, on a

$$\|h_2\|_{\alpha,\beta}\leqslant 33\ \mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big)\|f_2\|_{\alpha,\beta}.$$

On obtient finalement

$$\big(\|h_1\|^2_{\alpha,\beta}+\|h_2\|^2_{\alpha,\beta}\big)^{1/2}\leqslant 33\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big).$$

On suppose maintenant que f_1 et f_2 ne sont pas holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}^2$. On considère les fonctions $(f_1)_{r,r}$ et $(f_2)_{r,r}$ $(r<1)$. Donc il existe $h_{1,r},h_{2,r}\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ tel que

$$\begin{cases}(f_1)_{r,r}h_{1,r}+(f_2)_{r,r}h_{2,r}=1,\\ \big(\|h_{1,r}\|^2_{\alpha,\beta}+\|h_{2,r}\|^2_{\alpha,\beta}\big)^{1/2}\leqslant 33\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big),\quad r<1.\end{cases}$$

Puisque $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ peut être identifié comme le dual de

$$\ell^{\infty}_{\alpha,\beta}\big(\mathbb{N}^2\big):=\left\{(u_{n,m})_{n,m\geqslant 0}\colon\ \sup_{n,m\geqslant 0}\frac{|u_{n,m}|}{(1+n)^{\alpha}(1+m)^{\beta}}<\infty\right\}.$$

La boule unité fermée de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ est compacte pour la topologie $*$-faible. On en déduit qu'il existe $h_1,h_2\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ tels que

$$\begin{cases}f_1h_1+f_2h_2=1,\\ \big(\|h_1\|^2_{\alpha,\beta}+\|h_2\|^2_{\alpha,\beta}\big)^{1/2}\leqslant 33\mathcal{C}_1^3\big(\delta^2,\mathcal{A}_{\alpha,\beta}\big).\end{cases}$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 6. □

3. Preuve du Théorème 1

Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 8. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ *ne s'annulant pas sur* $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}$. *Alors il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\frac{1}{|f(z,w)|} \leqslant e^{\frac{M}{1-|z|}}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Supposons que $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Puisque l'application $\log|f(\cdot,w)|^{-1}$ est positive et harmonique sur $\mathbb{D}$, il existe une mesure positive $\mu = \mu_w$ sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\log\bigl|f(z,w)\bigr|^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2} \log\bigl|f\bigl(e^{i\varphi},w\bigr)\bigr|^{-1}\,d\mu(\varphi) \quad (w \in \mathbb{D}).$$

On obtient donc

$$\log\bigl|f(z,w)\bigr|^{-1} \leqslant 2\log\bigl|f(0,w)\bigr|^{-1}\bigl(1-|z|\bigr)^{-1}.$$

Par conséquent

$$\log\bigl|f(z,w)\bigr|^{-1} \leqslant M\bigl(1-|z|\bigr)^{-1},$$

où $M = 2\sup\{\log|f(0,w)|^{-1}\colon w \in \overline{\mathbb{D}}\}$. □

Le résultat suivant est dû à H. Hedenmalm [6, Proposition 1.2].

Lemme 9. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ *telle que* $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$. *Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) $f(\cdot,w)$ *est une fonction extérieure pour tout* $w \in \overline{\mathbb{D}}$,
(2) $\lim_{r\to 1^-}(1-r)\log|f(r,w)| = 0$ *pour tout* $w \in \overline{\mathbb{D}}$,
(3) $\lim_{r\to 1^-}\inf_{w\in\overline{\mathbb{D}}}(1-r)\log|f(r,w)| = 0$.

Nous aurons besoin du principe de Phragmén–Lindelöf suivant (voir [8]).

Lemme 10. *Soit* ϕ *une fonction analytique sur* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ *et soit* $\varepsilon > 0$. *On suppose que*

(i) $\bigl|\phi(\lambda)\bigr| \leqslant \dfrac{c_1}{(|\lambda|-1)^N}, \quad 1 < |\lambda| < 2,$

(ii) $\bigl|\phi(\lambda)\bigr| \leqslant c_2 \exp\dfrac{c_3}{1-|\lambda|}, \quad |\lambda| < 1,$

(iii) $\bigl|\phi(x)\bigr| \leqslant c_\varepsilon \exp\dfrac{\varepsilon}{1-x}, \quad x < 1,$

où les c_1, c_2, c_2 *sont des constantes positives,* N *est un entier et* c_ε *est une constante qui dépend de* ε. *Alors* ϕ *est un polynôme en* $\frac{1}{1-\lambda}$ *de degré inférieur ou égal à* N.

Preuve du Théorème 1. On supposera que $(\alpha,\beta)\in[0,1[\times]0,1[$. Supposons que $I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f)=I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(Z_f)$. Il est clair que pour tout $w\in\overline{\mathbb{D}}$ on a $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(f(\cdot,w))=I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(Z_{f(\cdot,w)})$ et donc $f(\cdot,w)$ est extérieure.

Supposons maintenant que $\|f\|_{\alpha,\beta}\leqslant 1$ et que $f(\cdot,w)$ est extérieure pour tout $w\in\overline{\mathbb{D}}$. Notons par π la surjection canonique sur $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ associée à $I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f)$, et par u la fonction définie par $u(z,w)=z$. Comme $Z_f=\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}$, le spectre de $\pi(u)$ est réduit au singleton $\{1\}$. Par conséquent l'application

$$\phi(\lambda)=\big(\lambda-\pi(u)\big)^{-1}$$

est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Nous allons montrer que ϕ satisfait les trois conditions du Lemme 10. Pour $1<|\lambda|<2$ on a :

$$\big\|\phi(\lambda)\big\|\leqslant\sum_{n\geqslant 0}\big\|\pi(u)^n\lambda^{-n-1}\big\|_{\alpha,\beta}\leqslant\sum_{n\geqslant 0}|\lambda|^{-n-1}(1+n)^{\alpha}\leqslant\frac{c}{(|\lambda|-1)^{1+\alpha}}. \tag{15}$$

Pour $|\lambda|<1$, on pose

$$L_\lambda(f)(z,w)=\begin{cases}\frac{f(z,w)-f(\lambda,w)}{z-\lambda} & \text{si } z\neq\lambda,\\ \frac{\partial}{\partial z}f(\lambda,w) & \text{si } z=\lambda.\end{cases} \tag{16}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\big\|L_\lambda(f)\big\|_{\alpha,\beta}&=\left\|\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{n,m}\left(\frac{z^n-\lambda^n}{z-\lambda}\right)w^m\right\|_{\alpha,\beta}\\ &=\left\|\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{n,m}\big(z^{n-1}+z^{n-2}\lambda+\cdots+\lambda^{n-1}\big)w^m\right\|_{\alpha,\beta}\leqslant\frac{\|f\|_{\alpha,\beta}}{1-|\lambda|}\leqslant\frac{1}{1-|\lambda|}.\end{aligned}$$

De l'équation (16), on a

$$\big\|\phi(\lambda)\big\|\leqslant\big\|\pi\big(L_\lambda(f)\big)\big\|_{\alpha,\beta}\big\|\big(f(\lambda,\cdot)\big)^{-1}\big\|_{\beta}\leqslant\frac{1}{1-|\lambda|}\big\|\big(f(\lambda,\cdot)\big)^{-1}\big\|_{\beta}.$$

On pose

$$\delta(\lambda)=\inf\big\{\big|f(\lambda,w)\big|:\ w\in\mathbb{D}\big\}.$$

Selon (2), $\mathcal{C}_1(\delta,\mathcal{A}_\beta)\leqslant c/\delta^{2+1/\beta}$ et

$$\big\|\phi(\lambda)\big\|\leqslant\frac{C}{(1-|\lambda|)(\delta(\lambda))^{2+1/\beta}}. \tag{17}$$

D'aprés le Lemme 8, il existe une constante $M>0$ telle que

$$\big\|\phi(\lambda)\big\|\leqslant e^{\frac{M}{1-|\lambda|}},\quad |\lambda|<1. \tag{18}$$

Puisque $f(\cdot,w)$ est extérieure pour tout $w\in\overline{\mathbb{D}}$, d'après le Lemme 9, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $c_\varepsilon>0$ telle que

$$\delta(r)\geqslant c_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon}{1-r}},\quad 0<r<1. \tag{19}$$

De (17) et (19), on obtient alors

$$\big\|\phi(r)\big\|\leqslant c_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{1-r}},\quad 0<r<1. \tag{20}$$

Soit $g \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f))^*$, le dual de $\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f)$. D'aprés les équations (15), (18) et (20), la fonction

$$\lambda \longrightarrow \phi_g(\lambda) := \langle \phi(\lambda), g \rangle$$

vérifie les conditions du Lemme 10. On en déduit que ϕ_g est un polynôme en $\frac{1}{1-\lambda}$ de degré 1. Donc $\pi(1-u) = 0$ et $I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f) \supseteq I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}})$. L'autre inclusion est triviale. Ce qui termine la preuve du Théorème 1. $\square$

Remarque 11. La preuve du Théorème 1 est basée essentiellement sur le fait que $\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}^+_\gamma) = O(\delta^{-c_\gamma})$ pour $\gamma > 0$ avec $c_\gamma > 0$. Dans le cas où $\gamma = 0$, il est connu que $\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}^+_0) = \infty$ pour $0 < \delta \leqslant 1/2$ (voir [3]) et par conséquent notre méthode ne s'applique pas au cas où $\alpha = \beta = 0$.

4. Preuve du Théorème 2

Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 12. *Soit $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D}^2)$ et soient $\alpha, \beta \in [0, 1[$. On suppose que les fonctions $z \to f(z, 0)$, $z \to \partial_w f(z, 0) \in \mathcal{A}^+_\alpha$ et $w \to f(0, w)$, $\partial_z f(0, w) \in \mathcal{A}^+_\beta$. S'il existe $0 < \varepsilon < 2\min\{(1-\alpha), (1-\beta)\}$ tel que*

$$\int_{\mathbb{D}^2} \left| \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial w^2} f(z, w) \right|^2 \big(1 - |z|\big)^{2(1-\alpha)-\varepsilon} \big(1 - |w|\big)^{2(1-\beta)-\varepsilon} \, dA(z)\, dA(w) < +\infty,$$

alors $f \in \mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
f(z, w) &= \sum_n \Big(\sum_m a_{n,m} w^m \Big) z^n \\
&= \sum_{n \geqslant 2} \Big(\sum_{m \geqslant 2} a_{n,m} w^m \Big) z^n + \sum_{n \geqslant 0} a_{n,0} z^n + \sum_{n \geqslant 0} a_{n,1} z^n w \\
&\quad + \sum_{m \geqslant 2} a_{0,m} w^m + \sum_{m \geqslant 2} a_{1,m} z w^m \\
&= \sum_{n \geqslant 2} \big(b_n(w)\big) z^n + f(z, 0) + w \partial_w f(z, 0) \\
&\quad + \big(f(0, w) - a_{0,0} - a_{0,1} w\big) + z \partial_z \big(f(0, w) - a_{1,0} - a_{1,1} w\big),
\end{aligned}$$

où $b_n(w) = \sum_{m \geqslant 2} a_{n,m} w^m$. Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geqslant 2} \sum_{m \geqslant 2} |a_{n,m}| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \\
&\quad = \sum_{n \geqslant 2} \Big(\sum_{m \geqslant 2} |a_{n,m}| (1+m)^\beta \Big) (1+n)^\alpha
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{(1+m)^{1+\epsilon}}\right)^{1/2}\sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{m\geqslant 2}|a_{n,m}|^2(1+m)^{2\beta+1+\epsilon}\right)^{1/2}(1+n)^{\alpha}$$

$$\leqslant c_{\epsilon,\beta}\sum_{n\geqslant 2}\left(\int_{\mathbb{D}}\left|\frac{\partial^2 b_n}{\partial w^2}(w)\right|^2\left(1-|w|^2\right)^{2(1-\beta)-\epsilon}dA(w)\right)^{1/2}(1+n)^{\alpha}$$

$$\leqslant c_{\epsilon,\beta}\left(\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(1+n)^{1+\epsilon}}\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int_{\mathbb{D}}\sum_{n\geqslant 2}\left(\left|\frac{\partial^2 b_n}{\partial w^2}(w)\right|^2(1+n)^{2\alpha+1+\epsilon}\right)\left(1-|w|^2\right)^{2(1-\beta)-\epsilon}dA(w)\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c_{\epsilon,\alpha,\beta}\int_{\mathbb{D}^2}\left|\frac{\partial^4 f}{\partial z^2\partial w^2}(z,w)\right|^2\left(1-|z|^2\right)^{2(1-\alpha)-\epsilon}\left(1-|w|^2\right)^{2(1-\beta)-\epsilon}dA(z)\,dA(w).$$

Ce qui termine la preuve. □

Lemme 13. *Soit u la fonction définie sur $\mathbb{D}^2$ par*

$$u(z,w):=\frac{(1-z)(1-w)}{[(1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}]^2}.$$

Alors u vérifie les propriétés suivantes :

(1) $|u(z,w)|\asymp\min\{|1-z|,|1-w|\}$,
(2) $\mathrm{Im}(u):=\{u(z,w)\colon (z,w)\in\mathbb{D}^2\}\subset\{z\in\mathbb{D}\colon |1-z|\leqslant 1\}$,
(3) $u^2\in\boldsymbol{\mathcal{A}}^+_{\alpha,\beta}$.

Démonstration. Pour montrer (1), il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\left|(1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}\right| &\geqslant \mathrm{Re}\left[(1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}\right]\\ &\geqslant \max\left\{\mathrm{Re}(1-z)^{1/2},\mathrm{Re}(1-w)^{1/2}\right\}\\ &\geqslant \cos\frac{\pi}{4}\max\left\{|1-z|^{1/2},|1-w|^{1/2}\right\}.\end{aligned}$$

(2). Puisque $\{z\in\mathbb{D}\colon |1-z|\leqslant 1\}=\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z)\geqslant |z|^2/2\}$, pour $(z,w)\in\mathbb{D}^2$, $\mathrm{Re}(1/(1-z))\geqslant 1/2$ et $\mathrm{Re}(1/(1-w))\geqslant 1/2$ et

$$\mathrm{Re}\frac{u(z,w)}{|u(z,w)|^2}=\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^{1/2}+\left(\frac{1}{1-w}\right)^{1/2}\right]^2\geqslant\frac{1}{2}.$$

Donc $u(z,w)\in\{z\in\mathbb{D}\colon |1-z|\leqslant 1\}$.

(3). Nous avons

$$\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial w^2}u^2(z,w)=\frac{105}{2}\frac{(1-z)(1-w)}{[(1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}]^8}-\frac{45}{2}\frac{(1-z)(1-w)}{[(1-z)^{1/2}+(1-w)^{1/2}]^6}$$

et

$$\int_{\mathbb{D}^2}\left|\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial w^2}u^2(z,w)\right|^2\big(1-|z|\big)^{1-\alpha}\big(1-|w|\big)^{1-\beta}\,dA(z)\,dA(w)$$
$$\leqslant c\int_{\mathbb{D}^2}\frac{1}{|1-z|^2}\frac{1}{|1-w|^2}(1-|z|)^{1-\alpha}\big(1-|w|\big)^{1-\beta}\,dA(z)\,dA(w)\leqslant c_{\alpha,\beta}.$$

Le résultat découle alors du Lemme 12 avec $\epsilon=\min\{1-\alpha,1-\beta\}$. $\square$

Preuve du Théorème 2. Soit u la fonction du Lemme 13. On pose $v:=u^2$, on a $v\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$. Soit $\pi:\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}\to\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f)$ la surjection canonique. Le spectre de $\pi(v)$ est réduit à $\{0\}$, donc l'application

$$\varphi(\lambda)=\big(\lambda-\pi(v)\big)^{-1}$$

est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Le Théorème 13 entraîne que

$$\operatorname{Im}(v)\subset\mathcal{S}:=\big\{z\in\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0[\colon\ \big|z^{1/2}-1\big|\leqslant 1\big\}.$$

D'aprés le Lemme 4 on a $\mathcal{C}_1(\delta,\mathcal{A}_{\alpha,\beta})\leqslant c\delta^{-c_{\alpha,\beta}}$. Donc il existe un entier N tel que pour tout $\lambda<0$ on a

$$\big\|\varphi(\lambda)\big\|\leqslant\big\|(\lambda-v)^{-1}\big\|_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}\leqslant\frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\mathcal{S})^N}\leqslant\frac{c}{|\lambda|^{2N}}.\tag{21}$$

Soit $\lambda\neq 0$. On pose

$$\delta(\lambda):=\inf\big\{\big|\lambda-v(z,w)\big|+\big|f(z,w)\big|\colon\ (z,w)\in\mathbb{D}^2\big\}.$$

Soit

$$\mathcal{Q}_\lambda:=\big\{(z,w)\in\overline{\mathbb{D}}^2\colon\ \big|v(z,w)-\lambda\big|\leqslant|\lambda|/2\big\}.$$

Nous avons

$$\big|\lambda-v(z,w)\big|+\big|f(z,w)\big|\geqslant\big|\lambda-v(z,w)\big|\geqslant\frac{|\lambda|}{2},\quad (z,w)\notin\mathcal{Q}_\lambda.$$

D'aprés le Lemme 13, on a

$$\inf\big\{|1-z|^2,|1-w|^2\big\}\geqslant c_1\big|v(z,w)\big|\geqslant c_1|\lambda|/2,\quad (z,w)\in\mathcal{Q}_\lambda,$$

donc, pour tout $\varepsilon>0$

$$\big|\lambda-v(z,w)\big|+\big|f(z,w)\big|\geqslant\big|f(z,w)\big|\geqslant c_\varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{-1/2}},\quad (z,w)\in\mathcal{Q}_\lambda.$$

Par conséquent

$$\delta(\lambda)\geqslant c_\varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{-1/2}}.\tag{22}$$

D'après le Théorème 5, il existe $h_1,h_2\in\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}$ tel que

$$\begin{cases}\big(\lambda-v(z)\big)h_1(z)+f(z)h_2(z)=1,\\ \|h_1\|^2_{\alpha,\beta}+\|h_2\|^2_{\alpha,\beta}\leqslant\delta(\lambda)^{-c_{\alpha,\beta}}.\end{cases}$$

De l'inégalité (22), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\varphi(\lambda)\|_{\alpha,\beta} &= \|(\lambda-\pi(v))^{-1}\|_{\alpha,\beta} = \|\pi(h_1)\|_{\alpha,\beta}\\ &\leqslant \delta(\lambda)^{-c_{\alpha,\beta}/2} \leqslant c_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|^{-1/2}}, \quad \lambda \neq 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Soit $g \in (\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}/I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f))^*$. On définit φ_g par

$$\lambda \longrightarrow \varphi_g(\lambda) := \langle \varphi(\lambda), g\rangle.$$

Le théorème classique de Phragmén–Lindelöf appliqué à la fonction φ_g nous permet de déduire, en utilisant les inégalités (21) et (23), que φ_g est un polynôme en $1/\lambda$ de degré inférieur à $2N$. Le théorème de Banach–Steinhaus nous donne $\pi(v)^{2N} = 0$ et $v^{2N} \in I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f)$. Soit maintenant la fonction g définie par

$$g(z,w) = (1-z)(1-w)\big((1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}\big)^{8N}, \quad (z,w) \in \mathbb{D}^2.$$

Puisque

$$v^{2N} g(z,w) = (1-z)^{4N+1}(1-w)^{4N+1},$$

$(1-z)^{4N+1}(1-w)^{4N+1} \in I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}(f)$. Pour conclure il suffit de remarquer que pour tout n

$$I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}\big((1-z)^n(1-w)^n\big) = I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}\big((1-z)(1-w)\big) = I_{\mathcal{A}^+_{\alpha,\beta}}\big((\{1\}\times\overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}}\times\{1\})\big)$$

ce qui termine la preuve. □

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les professeurs Alexander Borichev et Haakan Hedenmalm pour les discussions concernant ce travail.

Références

[1] A. Aleman, A. Dahlner, Uniform spectral radius and compact Gelfand transforms, Studia Math. 172 (2006) 25–46.
[2] O. El-Fallah, A. Ezzaaraoui, Majorations uniformes de normes d'inverses dans les algèbres de Beurling, J. Lond. Math. Soc. (2) 65 (3) (2002) 705–719.
[3] O. El-Fallah, N.K. Nikolski, M. Zarrabi, Estimates for resolvents in Beurling–Sobolev algebras, translation in St. Petersburg Math. J. 10 (6) (1999) 901–964.
[4] O. El-Fallah, M. Zarrabi, Estimations des solutions de l'équation de Bésout dans les algèbres de Beurling analytiques, Math. Scand. 96 (2005) 307–319.
[5] J. Esterle, E. Strouse, F. Zouakia, Closed ideals of the algebra of absolutely convergent Taylor series, Bull. Amer. Math. Soc. 31 (1994) 39–43.
[6] H. Hedenmalm, Outer functions in function algebras on the bidisc, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988) 697–714.
[7] H. Hedenmalm, Outer functions of several complex variables, J. Funct. Anal. 80 (1988) 9–15.
[8] H. Hedenmalm, Translates of functions of two variables, Duke Math. J. 58 (1) (1989) 251–297.
[9] H. Hedenmalm, Closed ideals in the ball algebra, Bull. London Math. Soc. 21 (1989) 469–474.
[10] H. Hedenmalm, Closed ideals in the bidisc algebra, Ark. Mat. 28 (1990) 111–117.
[11] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
[12] J.P. Kahane, Idéaux fermés dans certaines algèbres de fonctions analytiques, in : Actes Table Ronde Int. C.N.R.S. Montpellier, in : Lect. Notes, vol. 336, Springer-Verlag, 1973, pp. 5–14.
[13] P. Koosis, Introduction to H^p Spaces, second ed., Cambridge Tracts in Math., vol. 115, Cambridge Univ. Press, 1998.
[14] B.Ya. Levin, Translates of functions of two variables, Problem 7.20, in : Linear and Complex Analysis Problem Book, 199 Research Problems, in : Lecture Notes in Math., vol. 1043, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[15] N.K. Nikolski, In search of the invisible spectrum, Ann. Inst. Fourier 49 (1999) 1925–1998.